Partiel de Logique – Licence - IUP2 1999 / 2000

6 novembre 1999. Durée : 2 heures

Documents autorisés: poly, notes de cours, notes de TD.
Tout résultat déjà prouvé en cours et/ou en TD peut être utilisé sans besoin de le démontrer à nouveau.
Le barème est donné à titre indicatif et il est susceptible d'être modifié.

SVP, rédiger chaque exercice sur une feuille indépendante.

Exercice 1, 5 points

On considère un nouveau connecteur binaire γ, dont la sémantique est la fonction de vérité binaire f_γ définie par la table suivante :

Argum.1	Argum. 2	f_γ
V	V	F
V	F	V
F	V	F
F	F	F

1. Indiquer une formule F_γ ayant exactement deux lettres propositionnelle, contenant seulement $\neg$ et $\vee$ comme connecteurs, et exprimant (réalisant) f_γ. Démontrer que F_γ est bien logiquement équivalente à $p\gamma q$.
2. Ajouter au calcul des séquents **G** des règles (à gauche et à droite) pour le connecteur γ qui soient réversibles. Indiquer juste les règles, sans justifier votre réponse.

Exercice 2, 4 points

Supposons que chacun des trois membres d'une commission puisse voter "Oui" sur une proposition en poussant un bouton. Indiquer un circuit, le plus simple possible, tel que le courant passe si et seulement si au moins deux membres votent "Oui". Indiquer juste le circuit, sans justifier votre réponse.

Exercice 3, 4 points

Un graphe G (non vide) non orienté avec n sommets peut être spécifié par un ensemble $S = \{s_1, ..., s_n\}$, où $n > 0$ (l'ensemble des sommets) et un ensemble de paires de sommets (les arcs). Si k est un nombre naturel positif, et $C = \{c_1, ..., c_k\}$ sont k couleurs, on dira qu'un graphe G est *k-coloriable* si et seulement si on peut colorier chaque sommet avec une couleur de C de façon que, s'il existe un arc entre deux sommets (pouvant éventuellement être identiques), alors ces deux sommets ont des couleurs différentes.

Par exemple, si on a exactement deux sommets, s_1 et s_2 et un arc entre s_1 et s_2 le graphe n'est pas 1-coloriable mais il est toujours k-coloriable pour $k > 1$.

Dans cet exercice, nous considérons un graphe G non orienté avec exactement trois sommets, s_1, s_2, s_3 (i.e. n=3) et le cas de deux couleurs, disons rouge et vert (i.e. $k = 2$). Soit L un langage propositionnel L contenant les lettres propositionnelles $rouge_1$, $rouge_2$, $rouge_3$, $vert_1$, $vert_2$, $vert_3$. Soit ${G^3}_2$ la formule de la forme $(A \wedge B) \wedge C$ où :

- $A = ((rouge_1 \vee vert_1) \wedge (rouge_2 \vee vert_2)) \wedge (rouge_3 \vee vert_3)$
- $B = (B_1 \wedge B_2) \wedge B_3)$ où :

$$B_1 = (rouge_1 \to \neg vert_1) \wedge (vert_1 \to \neg rouge_1)$$
$$B_2 = (rouge_2 \to \neg vert_2) \wedge (vert_2 \to \neg rouge_2)$$
$$B_3 = (rouge_3 \to \neg vert_3) \wedge (vert_3 \to \neg rouge_3)$$

- Soit $C_{i,j}$ une formule de la forme : $(rouge_i \to \neg rouge_j) \wedge (vert_i \to \neg vert_j)$.
  La formule C est la conjonction de toutes les $C_{i,j}$ telles que G contient un arc entre le sommet s_i et le sommet s_j.

Questions

1. Montrer que si G est 2-coloriable (par les couleurs rouge et vert) alors la formule ${G^3}_2$ est satisfiable.
2. Montrer que si la formule ${G^3}_2$ est satisfiable, alors G est 2-coloriable (par les couleurs rouge et vert).

Exercice 4, 3 points

Généraliser la construction de l'exercice 3, en indiquant comment construire, quelque soit le nombre n de sommets d'un graphe G et le nombre k de couleurs, une formule ${G^n}_k$ telle que ${G^n}_k$ soit satisfiable si et seulement si le graphe G est k-coloriable.

Exercice 5, 4 points

Considérons la formulation alternative suivante de la règle droite pour $\wedge$ de **LK**, que nous appellerons *conj-d-BIS* :

$$\frac{\Gamma_1 \vdash A, \Delta_1 \qquad \Gamma_2 \vdash B, \Delta_2}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}$$

Ici, Γ_1 et Γ_2 sont deux multi-ensembles de formules quelconques et Γ est l'union multi-ensembliste de Γ_1 et Γ_2 (ainsi, si Γ_1 contient n occurrences de formules et Γ_2 en contient m, Γ en contient $n+m$). De même, Δ est l'union multi-ensembliste de Δ_1 et Δ_2.

Utiliser les règles de contraction et affaiblissement de **LK** pour montrer que la règle conj-d du cours (et du poly) et la règle conj-d-BIS sont *inter-dérivables*, c'est-à-dire :

1. Il existe une déduction du séquent conclusion de la règle conj-d-BIS à partir des séquents prémisses de cette règle en **LK** qui utilise (au maximum) les règles : conj-d, contraction, affaiblissement.
2. Il existe une déduction du séquent conclusion de la règle conj-d à partir des séquents prémisses de cette règle en **LK** qui utilise (au maximum) les règles : conj-d-BIS, contraction, affaiblissement.

CORRIGE DU PARTIEL DE LOGIQUE, 1999-2000

Exercice 1.

1. Un examen de la table de vérité définissant f_γ montre toute de suite que $p\gamma q$ est logiquement équivalente à $p \wedge \neg q$. D'autre part, on a la chaîne d'équivalences logiques : $p\gamma q \equiv \neg\neg(p \wedge \neg q) \equiv \neg(\neg p \vee (\neg\neg q) \equiv \neg(\neg p \vee q)$. On peut donc conclure que la formule $\neg(\neg p \vee q)$ est logiquement équivalente à $p\gamma q$ (par transitivité de $\equiv$ et qu'on peut poser $F_\gamma = \neg(\neg p \vee q)$.
2. Voici la règle de droite :

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A\gamma B}$$

et voici celle de gauche :

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma, A\gamma B \vdash \Delta}$$

Exercice 2.

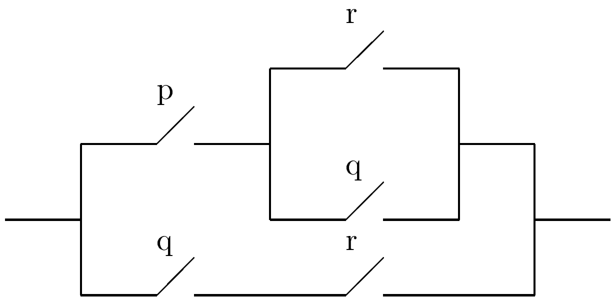
La formule suivante suivante exprime qu'au moins deux des trois variables propositionnelles p, q et r sont vrai:

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$$

Cette formule peut être simplifiée à

$$(p \wedge (q \vee r)) \vee (q \wedge r)$$

(il y deux autre possibilités symmetriques) qui donne le circuit



Exercice 3.
Intuitivement, le rôle de la formule A est de dire que chaque sommet a au moins une couleur, celui de B est de dire que chaque sommet a au maximum une couleur, et celui de C de dire que deux sommets reliés par un arc ont des couleurs différentes. Ci-dessous, la réponse précise aux deux questions est donnée.

1. Supposons que G soit 2-coloriable (avec rouge et vert). Soient 1,2,3 les trois sommets de G, et soit $Col(G)$ une coloration des sommets qui permet de conclure que G est 2-coloriable. Construisons une interprétation de I de ${G^3}_2$ telle que, pour $i \in \{1, 2, 3\}$, $I(rouge_i) = V$ ssi $Col(G)$ est telle que i est rouge, $I(rouge_i) = F$ ssi $Col(G)$ est telle que i n'est pas rouge, $I(vert_i) = V$ ssi $Col(G)$ est telle que i est vert, et I$(vert_i) = F$ ssi $Col(G)$ est telle que i n'est pas vert.

   Ainsi, pour chaque i, exactement une des deux lettres propositionnelles $rouge_i$ et $vert_i$ reçoit la valeur de vérité V, selon cette interprétation.
   Il en suit que I est un modèle de A car, pour chaque i, au moins une lettre parmi $rouge_i$ et $vert_i$ a la valeur V.
   L'interprétation $\mathcal{I}$ est aussi un modèle de B, car, pour chaque i, aux maximum une lettre parmi $rouge_i$ et $vert_i$ a la valeur V, ce qui implique que $rouge_i \wedge vert_i$ reçoit la valeur F.
   Enfin, observons que, puisque la coloration $Col(G)$ est telle que deux sommets i et j (pour $i, j \in \{1, 2, 3\}$) reliés par un arc n'ont jamais la même couleur, I est telle que si $I(rouge_i) = V$ et il y a un arc entre i et j, alors $I(rouge_j) = F$; de même, si $I(vert_i) = V$ et il y a un arc entre i et j, alors $I(vert_j) = F$. Or, puisque, par construction de C, une formule $C_{i,j}$ est une sous-formule de C si et seulement si il y a un arc entre i et j, il en suit que I est un modèle de C.

2. Soit G un graphe quelconque avec trois sommets 1,2,3 et soit I un modèle quelconque de ${G^3}_2$. Soit $Col(G)$ une coloration de G telle que, quelque soit le sommet i, $Col(G)$ colore i en rouge ssi $I(rouge_i) = V$ et colore i en vert ssi $I(vert_i) = i$. Cette coloration est "bien définie" car, puisque I est un modèle de B, tout sommet a au maximum une couleur. Elle est une coloration de chaque sommet car I est un modèle de A. La coloration est telle que deux sommets i et j reliés par un arc n'ont jamais la même couleur car I est un modèle de C. On peut donc conclure que G est 2-coloriable.

Exercice 4 Soit L un ensemble de lettres propositionnelles contenant $n \times k$ lettres propositionnelles $p_{s,c}$, où $1 \leq s \leq n$ et $1 \leq c \leq k$. Intuitivement, le rôle de chaque lettre $p_{s,c}$ est de dire que le sommet s a la couleur c (on identifie une couleur avec le nombre qu'elle reçoit dans une énumération quelconque des éléments de l'ensemble des couleurs). Ci-dessous, la notation $\vee_{1 \leq i \leq q} F_i$ indique la disjonction $F_1 \vee ... \vee F_q$; la notation $\wedge_{1 \leq i \leq q} F_i$ est analogue. La formule $G^n{}_k$ est la conjonction de $A^n{}_k$, $B^n{}_k$, $C^n{}_k$, où :

- Pour un s donné, $1 \leq s \leq n$, la formule D_i est définie par :$D_i = \vee_{1 \leq c \leq k} p_{s,c}$. La formule $A^n{}_k$ est définie par : $A^n{}_k = \wedge_{1 \leq s \leq n} D_s$.
- Pour un s donné, $1 \leq s \leq n$, et un c donné, $1 \leq c \leq k$, la formule $E_{s,c}$, est définie par :$E_{s,c} = p_{s,c} \rightarrow \wedge_{1 \leq c' \leq k, c' \neq c} \neg p_{s,c'}$. La formule $B^n{}_k$ est définie par : $B^n{}_k = \wedge_{1 \leq s \leq n, 1 \leq c \leq k} E_{s,c}$.
- Pour i et j donnés, $1 \leq i, j \leq n$ et un c donné, $1 \leq c \leq k$, la formule $F_{i,j,c}$ est définie par : $F_{i,j,c} = p_{i,c} \rightarrow \neg p_{j,c}$. Pour i et j donnés, la formule $H_{i,j}$ est définie par : $H_{i,j} = \wedge_{1 \leq c \leq k} F_{i,j,c}$. La formule $C^n{}_k$ est la conjonction de toutes les formules $H_{i,j}$ telles que i et j sont reliés par un arc dans le graphe G.

Exercice 5

1. Pour dériver conj-d-Bis en **LK**, observons qu'une **suite** d'affaiblissements, gauches et droits, permet de dériver, à partir de l'hypothèse $\Gamma_1 \vdash A, \Delta_1$, le séquent $\Gamma \vdash A, \Delta$ et, de même, une **suite** d'affaiblissements, gauches et droits, permet de dériver, à partir de l'hypothèse $\Gamma_2 \vdash B, \Delta_2$, le séquent $\Gamma \vdash B, \Delta$, où Γ est l'union multi-ensembliste de Γ_1 et Γ_2 et Δ est l'union multi-ensembliste de Δ_1 et Δ_2. Il suffit d'utiliser les séquents $\Gamma \vdash A, \Delta$ et $\Gamma \vdash B, \Delta$ comme prémisses de conj-d pour obtenir la conclusion voulue : $\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta$.
2. Pour dériver conj-d en **LK** (en utilisant, conj-d-Bis), observons qu'une application de conj-d-BIS aux prémisses $\Gamma \vdash A, \Delta$ et $\Gamma \vdash B, \Delta$ permet d'obtenir le séquent $\Gamma, \Gamma \vdash A \wedge B, \Delta, \Delta$. Si Γ a n éléments, Γ, Γ en a 2n, et de même pour Δ, Δ par rapport à Δ. Toutefois, une **suite** de contractions, à gauche et à droite, à partir de $\Gamma, \Gamma \vdash A \wedge B, \Delta, \Delta$ permet d'obtenir la conclusion voulue : $\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta$.