Partiel de Logique – Licence - IUP2 2000 / 2001

26 octobre 2000. Durée : 3 heures

Documents autorisés : poly, notes de cours, notes de TD.
Tout résultat déjà prouvé en cours et/ou en TD peut être utilisé sans besoin de le démontrer à nouveau.
Le barème est donné à titre indicatif et il est susceptible d'être modifié ; attention : il est sur 23 points.

Exercice 1
5 points

Pour chacune des formules suivantes, dites si elle est satisfiable mais pas valide, valide, insatisfiable. Justifiez vos réponses, en utilisant (de façon judicieuse) toute méthode à votre convenance. **Dans le cas d'une formule satisfiable mais pas valide, en indiquer un modèle et aussi une interprétation pour laquelle elle est fausse**.

1. $((p \to q) \wedge (q \to p)) \to (\neg(p \wedge q) \to \neg(p \vee q))$
2. $((p \to q) \to p) \to p$
3. $((p \to q) \wedge (q \to r)) \vee ((r \to q) \wedge (q \to p))$
4. $((p \to q) \wedge (q \leftrightarrow \mathcal{F})) \to (p \leftrightarrow \mathcal{F})$
5. $\neg((\neg(\neg(p \to \neg q)) \to \neg(p \wedge q)))$

Exercice 2
4 points

Considérons exclusivement des formules écrites avec les connecteurs $\to$ et $\wedge$, et un calcul des séquents **LK*** ayant exclusivement, comme règles d'inférence :

- Les 3 schémas d'axiomes de **LK** (celui du groupe identité et les deux axiomes logiques).
- La règle droite de **LK** pour $\to$.
- La règle droite de **LK** pour $\wedge$.

Questions :

1. Est-il vrai que le système de preuve **LK*** est correct ?
2. Est-il vrai que le système **LK*** est complet par rapport à la validité des formules écrites exclusivement à l'aide des connecteurs $\{\wedge, \to\}$?

Justifiez vos réponses.

Exercice 3
5 points

Le but de cet exercice est d'étendre la logique propositionnelle « classique » vers une logique avec *trois* valeurs de vérité : `Vrai`, `Faux` et `Inconnu` (notée `?`). Les principes pour étendre une fonction booléenne f sont :

- Si tous les arguments sont parmi `Vrai` et `Faux` alors la fonction doit renvoyer le même résultat que dans le cas classique.
- Si un ou plusieurs des arguments sont `?`, le résultat est `Vrai` (*resp.* `Faux`) si et seulement si on obtient toujours `Vrai` (*resp.* `Faux`) quand on remplace tous les arguments valant `?` par toutes les combinaisons possibles de `Vrai` et de `Faux`. Si le résultat ne peut être ni `Vrai` ni `Faux` il est alors `?`.

Par exemple, la table de vérité de la fonction de négation $f_\neg$ selon ces deux principes est maintenant :

x	$\neg x$
`Vrai`	`Faux`
`Faux`	`Vrai`
`?`	`?`

1. Donner la table de vérité de la fonction de conjonction $f_\wedge$ pour la logique à trois valeurs.
2. Donner la table de vérité de la fonction de disjonction $f_\vee$ pour la logique à trois valeurs
3. Est ce que la loi de *De Morgan*, qui dit que les deux formules $\neg(A \wedge B)$ et $\neg A \vee \neg B$ ont toujours la même valeur de vérité, est toujours vraie ?

Définition utilisée par la suite

Une formule propositionnelle A dont les seuls connecteurs sont $\neg$, $\vee$, $\wedge$ est dite être en *forme normale de négation (fnn)* si et seulement si toute occurrence éventuelle du connecteur $\neg$ s'applique seulement à des sous-formules de A qui sont atomiques.

Par exemple, p, $\mathcal{V}$, $\neg\mathcal{V}$ et $\neg p \vee (\neg q \wedge r)$ sont en *fnn*, par contre ni $\neg\neg p$ ni $\neg(p \wedge q)$ le sont.

Exercice 4
3 points
Démontrer que, étant donnée une formule quelconque B écrite exclusivement à l'aide des connecteurs $\neg, \wedge$ et $\vee$, il existe une formule B^{nn} qui est en forme normale de négation et qui est logiquement équivalente à B. Faire une récurrence sur le nombre c de connecteurs de B.

Exercice 5
3 points
Soit $\mathbf{G}^{gauche}$ le calcul des séquents obtenu à partir de $\mathbf{G}$ en supprimant toutes les règles droites, la règle gauche pour $\neg$, et en remplaçant les axiomes de $\mathbf{G}$ par :
- $A, \neg A, \Delta \vdash$ où A est *atomique* et Δ est un multi-ensemble de formules.
- $\mathcal{F}, \Delta \vdash$ où Δ est un multi-ensemble de formules.
- $\neg\mathcal{V}, \Delta \vdash$ où Δ est un multi-ensemble de formules.

Soit E un multi-ensemble fini de formules écrites exclusivement à l'aide des connecteurs $\neg, \wedge, \vee$, et qui sont en forme normale de négation (cf exercice précédent pour la définition de cette propriété). Soit $ATOMES = \{A_1, ..., A_n\}$, avec $n \geq 0$, un multi-ensemble fini (éventuellement vide) de formules atomiques et soit $\neg ATOMES$ une abréviation pour le multi-ensemble $\{\neg A_1, ..., \neg A_n\}$ Démontrer que s'il existe une preuve $\mathcal{P}$ dans $\mathbf{G}$ du séquent $E \vdash ATOMES$, alors il existe une preuve $\mathcal{P}'$ dans $\mathbf{G}^{gauche}$ du séquent $E, \neg ATOMES \vdash$, ayant une hauteur inférieure ou égale à celle de $\mathcal{P}$. Faire une récurrence sur la hauteur h des preuves de $\mathbf{G}$.

Exercice 6
3 points
Utiliser les résultats énoncés dans les exercices 4 et 5 pour montrer que étant donné un multi-ensemble fini quelconque de formules E écrites exclusivement à l'aide des connecteurs $\neg, \wedge$ et $\vee$ les trois propositions suivantes sont équivalentes :

1. E est insatisfiable ;
2. pour tout multi-ensemble E' de formules logiquement équivalentes à celles de E en forme normale de négation, il existe une preuve du séquent $E' \vdash$ dans le calcul $\mathbf{G}^{gauche}$;

3. il existe un multi-ensemble E' de formules logiquement équivalentes à celles de E en forme normale de négation, tel qu'il existe une preuve du séquent $E' \vdash$ dans le calcul $\mathbf{G}^{gauche}$.

Indication : on pourra par exemple pour cela montrer que la première proposition implique la seconde, puis que la seconde implique la troisième et enfin que la troisième implique la première.

Solutions des exercices

Exercice 1:

1. $F1 = ((p \to q) \wedge (q \to p)) \to (\neg(p \wedge q) \to \neg(p \vee q))$
   <u>méthode 1 :</u>
   On a : $((p \to q) \wedge (q \to p)) \equiv (p \leftrightarrow q)$
   et : $(\neg(p \wedge q) \to \neg(p \vee q)) \equiv (\neg\neg(p \wedge q) \to \neg(p \vee q))$
   $\equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
   $\equiv (p \leftrightarrow q)$
   or on sait que : $A \to A$ est valide donc F1 est **valide**.
   <u>méthode 2 :</u> table de vérité.
   Décomposons la formule $F1$ selon :
   $F1a = p \to q$
   $F1b = q \to p$
   $F1c = F1a \wedge F1b$
   $F1d = \neg(p \wedge q)$
   $F1e = \neg(p \vee q)$
   $F1f = (F1d \to F1e)$
   $F1 = F1c \to F1f$
   La table de vérité de F1 est alors :

p	q	$F1a$	$F1b$	$F1c$	$F1d$	$F1e$	$F1f$	$F1$
V	V	V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V	V

   N.B. : D'autres méthodes était envisageables, par exemple un calcul des séquent en LK ou G.

2. $F2 = ((p \to q) \to p) \to p$
   <u>méthode 1 :</u>
   Posons $F2a = (p \to q) \to p$ et $F2b = p$
   Si on cherche à rendre $F2$ Faux, il faut avoir $F2a$ Vrai et $F2b$ Faux.
   Supposons $F2b$ Faux, alors p est Faux. Alors $(p \to q) \to p \equiv (\mathcal{F} \to q) \to \mathcal{F} \equiv \mathcal{V} \to \mathcal{F} \equiv \mathcal{F}$
   Donc, on ne peut pas rendre la formule fausse, donc elle est **valide**.
   <u>méthode 2 :</u> table de vérité.

p	q	$F2a$	$F2b$	$F2$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

3. $F3 = ((p \to q) \wedge (q \to r)) \vee ((r \to q) \wedge (q \to p))$
   méthode 1 :
   Posons $F3' = (p \to q) \wedge (q \to r)$ et $F3'' = (r \to q) \wedge (q \to p)$

   Pour que $F3$ soit fausse, il faut que $F3'$ **et** $F3''$ soient fausses.
   Pour que $F3'$ soit fausse il faut que $(p \to q)$ soit fausse ou que $(q \to r)$ soit fausse.
   Pour que $F3''$ soit fausse il faut que $(r \to q)$ soit fausse ou que $(q \to p)$ soit fausse.
   Donc pour p et r vrais et q faux $(p \to q)$ et $(r \to q)$ sont fausses. Donc $F3'$ et $F3''$ sont fausses.
   Donc $F3$ est fausse.
   L'interprétation $\mathcal{I}_1$ pour laquelle $[p]_{\mathcal{I}_1} = V$, $[q]_{\mathcal{I}_1} = F$, $[r]_{\mathcal{I}_1} = V$, rend la formule fausse.

   Pour que $F3$ soit vraie, il suffit que $F3'$ **ou** $F3''$ soient vraies. Pour p, q, et r vrais $(p \to q)$ et $(r \to q)$ sont fausses.
   L'interprétation $\mathcal{I}_2$ pour laquelle $[p]_{\mathcal{I}_2} = V$, $[q]_{\mathcal{I}_2} = V$, $[r]_{\mathcal{I}_2} = V$, est un modèle de la formule $F3$.
   La formule $F3$ est donc satisfiable mais non valide.
   méthode 2 : table de vérité.
   Décomposons la formule $F3$ selon : $F3a = p \to q$
   $F3b = q \to r$
   $F3c = F3a \wedge F3b$
   $F3d = r \to q$
   $F3e = q \to p$
   $F3f = F3d \wedge F3e$
   $F3 = F3c \vee F3f$
   La table de vérité de $F3$ est alors donnée par :

p	q	r	$F3a$	$F3b$	$F3c$	$F3d$	$F3e$	$F3f$	$F3$
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	F	F	V	F	F
V	F	F	F	V	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	F	F	V
F	V	F	V	F	F	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V	F	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V	V	V	V

   N.B. on aurait pu s'arrêter de remplir la table à la troisième ligne, puisque l'on a une ligne V et une ligne F, donc un modèle et une interprétation qui rendent F3 fausse.
4. $F4 = ((p \to q) \wedge (q \leftrightarrow \mathcal{F})) \to (p \leftrightarrow \mathcal{F})$
   méthode 1 :
   On a : $p \leftrightarrow \mathcal{F} \equiv \neg p$, car si p est vrai $p \leftrightarrow \mathcal{F}$ est faux, et si p est faux $p \leftrightarrow \mathcal{F}$ est vrai.
   D'où $F4 \equiv ((p \to q) \wedge \neg q) \to \neg p$
   $\equiv \neg((p \to q) \wedge \neg q) \vee \neg p$
   $\equiv \neg(p \to q) \vee q \vee \neg p$
   $\equiv \neg(p \to q) \vee (p \to q)$
   $\equiv \mathcal{V}$

Donc $F4$ est **valide**
méthode 2 : table de vérité.

Décomposons $F4$ selon :
$F4a = p \to q$
$F4b =\leftrightarrow \mathcal{F}$
$F4c = F4a \wedge F4b$
$F4d = p \leftrightarrow \mathcal{F}$
$F4 = F4c \to F4d$
La table de vérité de $F4$ est alors donnée par :

p	q	$F4a$	$F4b$	$F4c$	$F4d$	$F4$
V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V
F	F	V	F	F	V	V

5. $F5 = \neg((\neg(\neg(p \to \neg q)) \to \neg(p \wedge q)))$

méthode 1 :
$F5 \equiv \neg((p \to \neg q) \to \neg(p \wedge q))$
$F5 \equiv \neg((p \to \neg q) \to (\neg p \vee \neg q))$
$F5 \equiv \neg((p \to \neg q) \to (p \to \neg q))$
$F5 \equiv \neg(B \to B)$ en posant $B = (p \to \neg q)$
$F5 \equiv \neg(\mathcal{V})$
$F5 \equiv \mathcal{F}$
Donc F5 est **insatisfiable**
méthode 2 : table de vérité.
Décomposons $F5$ selon :
$F5a = p \to \neg q$
$F5b = \neg(p \wedge q)$
$F5C = \neg F5a$
$F5d = \neg F5c$
$F5e = F5d \to F5b$
$F5 = \neg F5e$
La table de vérité de $F5$ est alors donnée par :

p	q	$F5a$	$F5b$	$F5c$	$F5d$	$F5e$	$F5$
V	V	F	F	V	F	V	F
V	F	V	V	F	V	V	F
F	V	V	V	F	V	V	F
F	F	V	V	F	V	V	F

Donc F5 est **insatisfiable**

Exercice 2:

Le calcul **LK*** est correct car ses règles sont des règles de **LK**, qui est correct. Il n'est pas complet, car le séquent valide $\vdash (p \wedge q) \to p$ n'est pas prouvable dans **LK*** (aucune règle de **LK*** n'est applicable - à l'envers - au séquent $p \wedge q \vdash p$)

Exercice 3:

- La table de vérité pour les deux premier questions :

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$
Faux	Faux	Faux	Faux
Faux	Vrai	Faux	Vrai
Faux	?	Faux	?
Vrai	Faux	Faux	Vrai
Vrai	Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	?	?	Vrai
?	Faux	Faux	?
?	Vrai	?	Vrai
?	?	?	?

- Il y a deux réponses possibles à la troisième question, selon la définition de l'équivalence :
  1. Soit en vérifie dans la table de vérité que $\neg(x \wedge y)$ et $\neg x \vee \neg y$ ont toujours la même valeur(`Faux`, `Vrai` ou `?`). Dans ce cas la réponse est "Oui".
  2. Soit on calcule la table de vérité de la formule $\neg(x \wedge y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$ et on regarde si cette formula a partout la valeur `Vrai` (et pas, par exemple, `?`). Ce n'est pas le cas, donc ici la solution est "Non".

  Voici la table de vérité (pas demandée, une justification brève suffit pour répondre à la question) :

x	y	$\neg(x \wedge y)$	$(\neg x \vee \neg y)$	$\neg(x \wedge y) \leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$
Faux	Faux	Vrai	Vrai	Vrai
Faux	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai
Faux	?	Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Vrai	Faux	Faux	Vrai
Vrai	?	?	?	?
?	Faux	Vrai	Vrai	Vrai
?	Vrai	?	?	?
?	?	?	?	?

Exercice 4:

Par récurrence sur le nombre c de connecteurs.

- Cas de base : $c = 0$, la formule B est atomique, donc c'est une forme normale de négation. OK.
- Récurrence :

  Hypothèse de récurrence : Supposons que pour toute formule F ayant au plus n connecteurs ($n \geq 0$), il existe une formule F^{nn} en forme normale de négation équivalente à F.

  Montrons qu'alors *pour toute formule B à $n+1$ connecteurs*, il existe une formule B^{nn} en forme normale de négation équivalente à B.

  Raisonnons par cas sur le connecteur principal de B, B a au moins un connecteur, donc on ne considère pas les formules atomiques, on ne considère que les connecteurs $\neg$, $\vee$ et $\wedge$ puisqu'ils forme un ensemble de connecteurs fonctionnellement complet.

  - $B = (\neg H)$ H est une formule quelconque à n connecteurs, raisonnons par cas sur le connecteur principal de H :

1. $H = (\neg G)$ donc $B = (\neg(\neg G)) \equiv G$, G est une formule à $n-1$ connecteurs qui vérifie donc l'hypothèse de récurrence. donc il existe G^{nn} en *fnn* et équivalente à B. OK.
2. $H = (A \wedge B)$ donc $B = \neg(A \wedge B) \equiv ((\neg A) \vee (\neg B))$, les formules $(\neg A)$ et $(\neg B)$ ont n connecteurs. Donc il existe A'^{nn} et B'^{nn} en *fnn* équivalentes à $(\neg A)$ et $(\neg B)$, donc $B \equiv (A'^{nn} \vee B'^{nn})$, qui est encore en *fnn*. OK
3. $H = (A \vee B)$ Même raisonnement.

- $B = (H \vee G)$ H et G sont des formules quelconques à au plus n connecteurs, elles vérifient donc l'hypothèse de récurrence. Donc il existe H^{nn} et G^{nn} en *fnn* et équivalentes à H et G. Donc $B \equiv (H^{nn} \vee G^{nn})$ qui est en *fnn*. OK.
- Même raisonnement.

Par récurrence, toutes les formules admettent une forme normale de négation.

Erreurs les plus frequentes

1. *La formule B de taille $n+1$, sur laquelle il faut faire l'étape de récurrence, est QUELCONQUE. Ceci s'applique d'ailleurs à toutes les récurrences. En particulier, B n'est pas forcément construite à partir de formule(s) de taille n. Bannissez donc de votre vocabulaire les phrases du genre "on rajoute un connecteur..." c'est faux. La bonne méthode est de prendre une formule quelconque et de traiter les différents cas possibles.*
2. *Les cas des connecteur $\vee$ et $\wedge$ étaient triviaux, le cas de la négation nécessitait un traitement supplémentaire, il était possible de refaire une récurrence, en fait un traitement par cas était suffisant.*

Exercice 5:

Base : $h = 1$. Dans ce cas $\mathcal{P}$ est un axiome de $\mathbf{G}$. Si c'est $\mathcal{F} \vdash$, c'est aussi un axiome de $\mathbf{G}^{gauche}$. Si c'est de la forme $A, \Gamma \vdash A, \Delta$, alors A est atomique et Δ ne contient que des formules atomiques ; donc, le séquent $A, \Gamma, \neg A, \neg\Delta$ est un axiome de $\mathbf{G}^{gauche}$. Si c'est $\vdash \mathcal{V}$, alors $\neg\mathcal{V} \vdash$ est un axiome de $\mathbf{G}^{gauche}$. *Étape de Récurrence* : $h = m > 1$.

Hyp. de Réc : Si E' est un multi-ensemble de formules écrites exclusivement à l'aide des connecteurs $\neg, \wedge, \vee$, et qui sont en forme normale de négation, si $ATOMES$ est un multi-ensemble de formules atomiques et si $\mathcal{P}$ est une preuve du séquent $E' \vdash ATOMES$ dans $\mathbf{G}$ qui a une hauteur h strictement inférieure à m, alors il existe une preuve $\mathcal{P}'$ de $E', \neg ATOMES$ dans dans $\mathbf{G}^{gauche}$ qui aune hauteur inférieure ou égale à celle de $\mathcal{P}$.

Tout d'abord, on observe que aucune règle de droite est immédiatement applicable à un séquent de la forme $E' \vdash ATOMES$, car à droite de $\vdash$ on a seulement des formules atomiques. Ensuite, on considère plusieurs cas, selon la nature de la règle (forcement de gauche) $\mathcal{R}$ la plus proche à la racine de la preuve $\mathcal{P}$.

1. $\mathcal{R}$ est la règle gauche de négation. Dans ce cas, $E' \vdash ATOMES$ a forcement la forme $\neg A, E'' \vdash ATOMES$, où A est *atomique* et E'' est un multi-ensemble de formules écrites exclusivement à l'aide des connecteurs $\neg, \wedge, \vee$, et qui sont en forme normale de négation. Ainsi, la prémisse de $\mathcal{R}$ a la forme
$$E'' \vdash ATOMES, A$$
La sous-preuve de ce dernier séquent est de hauteur $m-1$. Il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence.
2. $\mathcal{R}$ est la règle gauche pour $\wedge$. Dans ce cas, $E' \vdash ATOMES$ a forcement la forme $B \wedge C, E'' \vdash ATOMES$, où E'' est un multi-ensemble de formules écrites exclusivement à l'aide des connec-

teurs $\neg, \wedge, \vee$, et qui sont en forme normale de négation. La prémisse de $\mathcal{R}$ a la forme

$$B, C, E'' \vdash ATOME$$

La sous-preuve de ce dernier séquent est de hauteur $m-1$. Par hypothèse de récurrence il existe une preuve de hauteur inférieure ou égale à $m-1$ de $B, C, E''\neg ATOMES \vdash$ dans $\mathbf{G}^{gauche}$. Une application de la règle gauche pour $\wedge$ à $B, C, E''\neg ATOMES$ permet d'obtenir la preuve $\mathcal{P}'$ requise.

3. $\mathcal{R}$ est la règle gauche pour $\vee$. Dans ce cas, $E' \vdash ATOMES$ a forcement la forme $B \vee C, E'' \vdash ATOMES$, où E'' est un multi-ensemble de formules écrites exclusivement à l'aide des connecteurs $\neg, \wedge, \vee$, et qui sont en forme normale de négation. Les prémisses de $\mathcal{R}$ ont les formes

$$B, E'' \vdash ATOMES \vdash \qquad\qquad C, E'' \vdash ATOMES \vdash$$

Les sous-preuves respectives de ces deux séquents ont des hauteurs strictement inférieures à m. Deux applications de l'hypothèse de récurrence permettent donc d'obtenir des preuves dans $\mathbf{G}^{gauche}$ des s
'equents

$$B, E'', \neg ATOMES \vdash \qquad\qquad C, E''\neg ATOMES \vdash$$

Une application de la règle gauche pour $\vee$ à ces séquents permet de conclure.

Erreurs les plus frequentes

1. *Ne pas comprendre qu'il faut montrer que la preuve $\mathcal{P}'$* **existe***....*
2. *Essaier d'utiliser une recurrence "faible", à la place d'une "forte", ce qui va forcement créer des erreurs.*
3. *Ne pas savoir ce qu'une hypothèse de récurrence est (tout en croyant de le savoir :-)*
4. *Ne pas comprendre qu'il faut d'abord déterminer quelle règles de* **G** *peut utiliser la preuve $\mathcal{P}$, vue la forme du séquent conclusion.*

Exercice 6:

Montrons (1) $\Rightarrow$ (2)**.** Supposons que E soit insatisfiable et soit $E' = F_1, \ldots, F_n$ un multi-ensemble de formules logiquement équivalentes à celles de E en forme normale de négation. Comme les formules de E et celles de E' sont logiquement équivalentes, E' est insatisfiable, la formule $F_1 \wedge \ldots \wedge F_n$ est donc insatisfiable, donc $F_1 \wedge \ldots \wedge F_n \rightarrow \mathcal{F}$ est valide, donc le séquent $E' \vdash$ est valide. Donc, $\mathbf{G}$ étant complet, $E' \vdash$ est démontrable dans $\mathbf{G}$. Donc, d'après l'exercice 5, il existe une preuve de $E' \vdash$ dans $\mathbf{G}^{gauche}$.

Montrons (2) $\Rightarrow$ (3)**.** Supposons que pour tout multi-ensemble E' de formules logiquement équivalents à celle de E en forme normale de négation, il existe une preuve du séquent $E' \vdash$ dans le calcul $\mathbf{G}^{gauche}$. D'après l'exercice 4, on peut, pour chaque formule de E, construire une formule logiquement équivalente en forme normale de négation. Donc on peut construire un multi-ensemble E'' de formules en forme normale de négation logiquement équivalentes à celles de E. D'après notre hypothèse, il existe donc une preuve du séquent $E'' \vdash$ dans $\mathbf{G}^{gauche}$.

Montrons (3) $\Rightarrow$ (1). Supposons qu'il existe un multi-ensemble $E' = F_1, \ldots, F_n$ de formules logiquement équivalentes à celles de E en forme normale de négation tel qu'il existe une preuve du séquent $E' \vdash$ dans le calcul $\mathbf{G}^{gauche}$. Remarquons tout d'abord que le calcul $\mathbf{G}^{gauche}$ est correct (en effet, ses axiomes sont clairement des formules valides et ses règles sont des règles de $\mathbf{G}$ dont on sait qu'il n'a que des règles correctes). Donc $E' \vdash$ est un séquent valide, c'est-à-dire que la formule $F_1 \wedge \ldots \wedge F_n \to \mathcal{F}$ est valide, donc que la formule $F_1 \wedge \ldots \wedge F_n$ est insatisfiable, donc que E' est insatisfiable. Or les formules de E' sont logiquement équivalentes à celles de E, donc E est insatisfiable.

On a donc montré que les trois propositions données sont équivalentes.

Quelques erreurs rencontrées dans les copies :

- *Croire que l'implication* (2) $\Rightarrow$ (3) *est complètement triviale. Nous vous laissons le soin de méditer l'exemple suivant. Soit les deux propositions suivantes :*

  1. *Pour tout x réel solution de l'équation $x^2 + 2x + 2 = 0$, on a $(x^2 + 2x)^2 = 4$.*
  2. *Il existe x réel solution de l'équation $x^2 + 2x + 2 = 0$ tel qu'on ait $(x^2 + 2x)^2 = 4$.*

  La première proposition n'implique pas la seconde. On pourra en effet vérifier que la première proposition est vraie, puis que la seconde est fausse (l'équation $x^2 + 2x + 2$ n'ayant pas de solution réelle).
- *Montrer* (1) $\Rightarrow$ (3) *en croyant montrer* (1) $\Rightarrow$ (2). *Pour montrer cette dernière implication, la bonne méthode est de supposer d'abord qu'on a* (1), *puis de prendre un multi-ensemble E' de formules logiquement équivalentes à celles de E en forme normale de négation* quelconque *et non celui donné par l'exercice 4.*
- *Oublier de parler du fait que $\boldsymbol{G}^{gauche}$ est correct pour montrer* (3) $\Rightarrow$ (1).
- *Croire que la propriété «être prouvable dans un calcul» est préservée par équivalence logique (par exemple penser que si E et E' sont des multi-ensemble de formules équivalentes, alors $E \vdash$ est prouvable si et seulement si $E' \vdash$ est prouvable). C'est un résultat qui se montre en général en se ramenant à la notion de* validité *d'un séquent, cette démonstration dépendant du fait que le calcul considéré soit correct et complet.*
- *Croire qu'un raisonnement de la forme «Supposons* (1)*...donc on a* (2) *...donc on a* (3) *...donc on a* (1)*.» montre l'équivalence des trois propositions* (1), (2) *et* (3). *Ce n'est pas le cas : ce raisonnement montre seulement que* (2), (3) *et* (1) *découlent de* (1), *c'est-à-dire* (1) $\Rightarrow$ (2), (1) $\Rightarrow$ (3) *et* (1) $\Rightarrow$ (1) *(qui est une trivialité).*