Examen de Logique – Licence - IUP2 1999 / 2000

6 septembre 2000. Durée : 3 heures

Documents autorisés: poly, notes de cours, notes de TD.
Tout résultat déjà prouvé en cours et/ou en TD peut être utilisé sans besoin de le démontrer à nouveau.
Le barème est donné à titre indicatif et il est susceptible d'être modifié.

Exercice 1: 3 points

Formaliser en calcul des prédicats du premier ordre les énoncés suivants :

1. Tout utilisateur a la permission d'écriture sur au moins un fichier.
2. Chaque fichier est tel qu'il existe au moins un utilisateur qui a la permission d'écriture sur ce fichier.
3. Personne n'a la permission d'écriture sur tous les fichiers.
4. Au moins un utilisateur a la permission de lecture sur tous les fichiers.
5. Si un utilisateur a la permission d'écriture d'un fichier alors il a aussi la permission de lecture de ce fichier.
6. Ce n'est pas vrai que tout utilisateur ayant la permission de lecture sur un fichier a aussi la permission d'écriture sur celui-ci.

Pour la formalisation, on utilisera (exclusivement) les prédicats U, F, P :

- U, à un argument. Signification intuitive de $U(x)$: x est un utilisateur.
- F, à un argument. Signification intuitive de $F(x)$: x est un fichier.
- P, à trois arguments. Signification intuitive de $P(x, z, y)$: x a la permission de l'opération z sur y.

et les constantes w (écriture) et r (lecture).

Solution

1. $\forall x\ (U(x) \to \exists y(F(y) \wedge P(x, w, y))$
2. $\forall y\ (F(y) \to \exists x(U(x) \wedge P(x, w, y)))$
3. $\neg\ \exists x(U(x) \wedge \forall y(F(y) \to P(x, w, y)))$
4. $\exists x\ (U(x) \wedge \forall y(F(y) \to P(x, r, y)))$
5. $\forall x\ \forall y\ ((U(x) \wedge F(y)) \to (P(x, w, y) \to P(x, r, y)))$
6. $\neg(\forall x\ \forall y\ ((U(x) \wedge F(y)) \to (P(x, r, y) \to P(x, w, y))))$

Exercice 2 : 6 points

Soit $\mathcal{L}$ le langage du premier ordre contenant exclusivement deux prédicats (binaires) r et $\sim$, et ne contenant pas de symboles de fonction. Un ensemble non vide E muni d'une relation binaire $\mathcal{R}$ est dit être *partiellement ordonné par* $\mathcal{R}$ si toute interprétation $\mathcal{I}$ ayant E comme domaine et telle que $\mathcal{I}(r)$ est $\mathcal{R}$ et $\mathcal{I}(\sim)$ est l'identité sur E, est un modèle de la formule de $\mathcal{L}$ suivante :

$$(*) \qquad \forall x \forall y \forall z[((r(x,y) \wedge r(y,z)) \rightarrow r(x,z)] \wedge \forall v \forall w[((r(v,w) \wedge r(w,v)) \leftrightarrow \sim (v,w)]$$

(*INTUITION*: Lire $r(x,y)$ comme "x est plus petit ou égal que y"; la formule (*) n'implique pas que deux éléments soient toujours comparables par rapport à cet ordre, ce qui justifie l'adjectif *partiel*).

Les notions de élément *maximum* et élément *minimum* de E par rapport à l'ordre partiel $\mathcal{R}$ sont celles habituelles On dit qu'un élément d de E est *maximal* par rapport à l'ordre partiel $\mathcal{R}$ s'il n'existe pas d'élément $d' \in E$ différent de d et tel que $< d, d' > \in \mathcal{R}$. Etant donnés deux éléments d_1, d_2 de E, un élément d de E est dit être un *sup* de d_1 et d_2 par rapport à $\mathcal{R}$ si d est un élément minimum par rapport à $\mathcal{R}$ du sous-ensemble E' de E défini par :

$$E' = \{x \in E \ \mid \ < d_1, x > \in \mathcal{R} \text{ et } < d_2, x > \in \mathcal{R}\}$$

Questions

1. Exprimer en français l'énoncé formalisé par la formule * ci-dessus.
2. Démontrer que si une relation binaire $\mathcal{R}$ est un ordre partiel d'un ensemble non vide E, alors $\mathcal{R}$ est réflexive (*Démontrez-le comme vous voulez, mais de façon rigoureuse et synthétique !*).
3. Ecrire une formule F_1 de $\mathcal{L}$ ayant une seule variable libre x et telle que, pour n'importe quelle interprétation $\mathcal{I}$ associant un ensemble E et un ordre partiel $\mathcal{R}$ de E à $\mathcal{L}$, F_1 est satisfaite par une valeur $d \in E$ de la variable x si et seulement si d est le *maximum* de E par rapport à $\mathcal{R}$.
4. Même question que 3, mais en remplaçant "maximum" par "maximal" (c.-à.-d. : Ecrire une formule F_2 de $\mathcal{L}$ ayant une seule variable libre x et telle que ....)
5. Démontrer qu'un ensemble E partiellement ordonné par $\mathcal{R}$ peut avoir un élément maximal sans avoir un élément maximum *en exhibant un modèle de* $(*) \wedge ((\neg \exists x F_1) \wedge (\exists x F_2))$ qui interprète $\sim$ par l'identité.
6. Ecrire une formule F_3 de $\mathcal{L}$ ayant exactement trois variables libres x_1, x_2, x_3 et ayant la propriété suivante :
   Si $\mathcal{I}$ est une interprétation ayant E comme domaine, interprétant r par un ordre partiel $\mathcal{R}$ de E et $\sim$ par l'identité, alors F_3 est satisfaite en $\mathcal{I}$ par un triplet $< d_1, d_2, d_3 >$ de valeurs respectives des variables x_1, x_2, x_3 si et seulement si d_1 est un *sup* de d_2 et d_3.

Solution

1. La relation r est transitive, réflexive et asymétrique.

2. Voir la réponse précédente. Plus formellement : supposons que $\mathcal{R}$ soit un ordre partiel de E . Par (*), on a quel que soit $d \in D$, si $d = d$ alors on a $< d, d > \in \mathcal{R}$ et $< d, d > \in \mathcal{R}$, i.e. que, quel que soit $d \in D$, $< d, d > \in \mathcal{R}$.

3. $F_1 \ : \ \forall y \, r(y, x)$

4. $F_2 \ : \ \neg \, \exists y \, (\neg \sim (x, y) \wedge r(x, y))$

5. Il suffit de prendre l'interprétation $\mathcal{I}$ telle que : le domaine est $\{1, 2\}$, $\mathcal{I}(\sim)$ et $\mathcal{I}(r)$ ont la même valeur : $\{< 1, 1 >, < 2, 2 >\}$. Il n'existe pas de maximum, et tant 1 que 2 sont des éléments maximaux de l'ordre partiel $\mathcal{I}(r)$ de l'ensemble $\{1, 2\}$.

6. $\forall y \, [((r(x_2, y) \wedge r(x_3, y)) \rightarrow r(x_1, y)) \ \wedge (r(x_3, x_1) \wedge (r(x_2, x_1))]$

Exercice 3 : 4 points

Dans cet exercice, a est la seule constante, x, y, w, v sont des variables. Donner une réfutation de l'ensemble de clauses suivant :

1. $\neg p(x) \vee q(f(x), x)$
2. $\neg p(v) \vee \neg q(y, v) \vee r(y)$
3. $\neg r(y) \vee \neg s(y) \vee \neg p(x) \vee \neg q(y, x)$
4. $\neg s(y) \vee r(y)$
5. $p(a)$
6. $\neg r(w) \vee s(w)$

S'il vous plaît, dans la rédaction de votre réponse, indiquez toute clause appartenant à l'ensemble ci-dessus par son numéro, sans la réécrire.

Solution

7) $q(f(a), a)$ 1,5, RES
8) $\neg q(y, a) \ \vee \ r(y)$ 2,5, RES
9) $r(f(a))$ 7,8, RES
10) $\neg r(y) \ \vee \ \neg s(y) \ \vee \neg q(y, a)$ 3,5, RES
11) $\neg r(y) \ \vee \neg r(y) \ \vee \neg q(y, a)$ 6,10, RES
12) $\neg r(y) \ \vee \neg q(y, a)$ 11, FACT
13) $\neg r(f(a))$ 7, 12, RES (après renommage)
14) $\emptyset$ 9,13, RES

Remarque : La clause 4 n'a pas été utilisée.

Exercice 4 : 4 points

Soit $\mathcal{L}$ un langage du calcul des prédicats contenant, entre autre, le symbole de prédicat $\sim$, à deux arguments. Disons qu'une interprétation $\mathcal{I}$ de $\mathcal{L}$ est *normale* si $\mathcal{I}(\sim)$ est l'identité sur le domaine de $\mathcal{I}$. Soit $A(x)$ n'importe quelle formule de $\mathcal{L}$ ayant x comme variable libre, indiquant une propriété des éléments du domaine. L'expression $\exists_1 x\ A(x)$ est une abréviation de la formule :

$$(**)\quad \exists x\ A(x) \wedge \forall v \forall w((A(v) \wedge A(w)) \rightarrow\sim (v, w))$$

où v, w sont des variables qui n'apparaîssent pas dans $A(x)$.

Questions :

1. Soit p un symbole de prédicat unaire. Ecrire la formule $\exists_1 x\ p(x)$ et démontrer qu'elle est vraie dans une interprétation normale $\mathcal{I}$ si et seulement s'il existe un et un seul élément du domaine de $\mathcal{I}$ qui a la propriété correspondant à p.
2. Soit $A(x)$ n'importe quelle formule de $\mathcal{L}$ ayant x comme seule variable libre. On définit par récurrence sur n les expressions $\exists_n x\ A(x)$ comme suit :
   - $\exists_1 x\ A(x)$ a été définie ci-dessus (voir (**))
   - Si $n > 1$, l'expression $\exists_n x\ A(x)$ est une abréviation de $\exists y\ [A(y) \wedge \exists_{n-1} x\ (\neg \sim (x, y) \wedge A(x))]$ où y est une variable qui n'apparaît pas dans $A(y) \wedge \exists_{n-1} x\ (\neg \sim (x, y) \wedge A(x))$

   (a) Ecrire $\exists_2 x\ p(x)$.

   (b) Démontrer que, quelque soit la formule $A(x)$ de $\mathcal{L}$ ayant exactement x comme variable libre et quel que soit $n \in N$, $\exists_n x\ p(x)$ est vraie dans une interprétation normale $\mathcal{I}$ si et seulement s'il existe exactement n éléments du domaine de $\mathcal{I}$ qui ont la propriété correspondant à $A(x)$. (*Soyez concis !*)

Esquisse de preuve

1. La formule est $\exists x\ p(x) \wedge \forall v \forall w((p(v) \wedge p(w)) \rightarrow\sim (v, w))$. Cette formule implique logiquement $\exists x\ p(x)$, donc qu'il existe au moins un élément ayant la propriété correspondant à p. Elle implique aussi $\forall v \forall w((p(v) \wedge p(w)) \rightarrow\sim (v, w))$, qui, si l'on interprète $\sim$ par l'égalité, dit qu'au maximum deux éléments distincts ont la propriété correspondant à p.
2. (a) $\exists y[p(y) \wedge \exists x(\neg \sim (x, y) \wedge p(x) \wedge \forall v \forall w((\neg \sim (v, y) \wedge p(v) \wedge \neg \sim (w, y) \wedge p(w)) \rightarrow\sim (v, w))]$.

   (b) Pour prouver cela, on prouve, par récurrence sur n, que quelque soit la formule $A(x)$ de $\mathcal{L}$ ayant x parmi ses variables libres et quel que soit $n \in N$, $\exists_n x\ p(x)$ est vraie dans une interprétation normale $\mathcal{I}$ si et seulement s'il existe exactement n éléments du domaine de $\mathcal{I}$ qui ont la propriété correspondant à $A(x)$.
   Pour montrer la base de cette récurrence ($n = 1$), on raisonne comme pour 2a. Supposons que le résultat soit vrai au rang $n-1$. La formule $\exists_n x\ A(x)$, i.e. $\exists y\ [A(y) \wedge \exists_{n-1} x\ (\neg \sim (x, y) \wedge A(x))]$, implique qu'un certain élément (valeur de) y a la propriété correspondant à A. D'autre part, elle implique aussi $\exists_{n-1} x\ (\neg \sim (x, y) \wedge A(x))]$; or, la sous-formule $(\neg \sim (x, y) \wedge A(x))$ est bien une formule de $\mathcal{L}$ ayant x parmi ses variables libres, donc, par hypothèse de récurrence, est vraie dans une interprétation normale $\mathcal{I}$ si et seulement s'il existe exactement $n-1$ éléments du domaine de $\mathcal{I}$ qui ont la propriété A et qui sont différents de y. En conclusion, on doit avoir exactement n éléments ayant la propriété A.

Exercice 5 : 3 points

Soit $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre sans symboles de fonction. Dites si l'énoncé suivant est vraie ou faux, et justifiez votre réponse.

Toute formule close prenexe telle que tous les quantificateurs sont existentiels est valide si et seulement si elle est vraie dans toutes les interprétations dont le domaine a exactement un élément.

Solution

C'est vrai. On peut le prouver par l'absurde, en faisant le raisonnement suivant. Supposons qu'une formule close $A = \exists x_1, ..., \exists x_n\ B$, où $n \geq 0$ et B n'a pas de quantificateurs, soit vraie dans *toute* interprétation dont le domaine a exactement un élément et toutefois fausse dans quelque interprétation $\mathcal{I}^*$ ayant m éléments, où $m > 1$. Puisque $\mathcal{I}^* \not\models A$, quelque soit le n-uplet $< d_1, ..., d_n >$ d'éléments du domaine, $< d_1, ..., d_n >$ ne satisfait pas B. En d'autres mots, $\mathcal{I}^* \models \forall x_1 ... \forall x_n\ \neg B$. Il en suit que, en particulier, le n-uplet $< d, ..., d >$ (où d est n'importe quel élément du domaine), satisfait $\neg B$ en $\mathcal{I}^*$. Soit alors l'interprétation $\mathcal{I}^{**}$ de $\mathcal{L}$ obtenue à partir de $\mathcal{I}^*$ comme suit :

1. Le domaine est le singleton $\{d\}$
2. Quel que soit le symbole de prédicat r à k arguments, $\mathcal{I}^{**}(r)$ est la restriction de la relation $\mathcal{I}^*$ à l'ensemble $\{d\}^k$.

Remarquer que cette définition de $\mathcal{I}^*$ est correcte grâce au fait que $\mathcal{L}$ *ne contient pas de symboles de fonction*. Il est clair que $\mathcal{I}^{**} \models \forall x_1 ... \forall x_n\ \neg B$, par conséquent $\mathcal{I}^{**} \not\models \exists x_1, ..., \exists x_n\ A$.

Nous avons une contradiction avec l'hypothèse que A soit vraie dans *toute* interprétation dont le domaine a exactement un élément.