Nom :
Prénom :

1

Si $A = (Etats, Alphabet, Initial, Finals, Transistions)$ est un automate qui reconnait un langage L, alors l'automate $(Etats, Alphabet, Initial, Etats - Finals, Transistions)$, c'est-à-dire l'automate A dans lequel on a renversé le role des finals et des non-finals, est un automate qui reconnait le complémentaire de L.

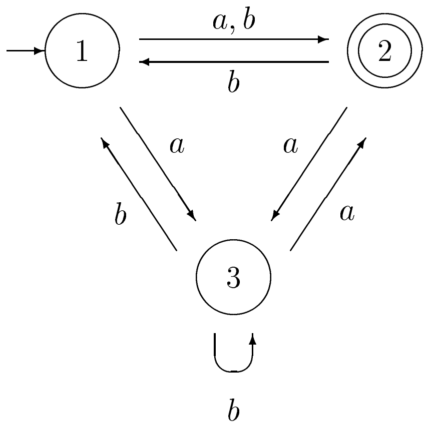
Pour quelle catégorie d'automate cette affirmation est-elle vraie ?

- Tous les automates
- Les automates sans ϵ transitions
- Autre. Precisez alors quelle autre catégorie

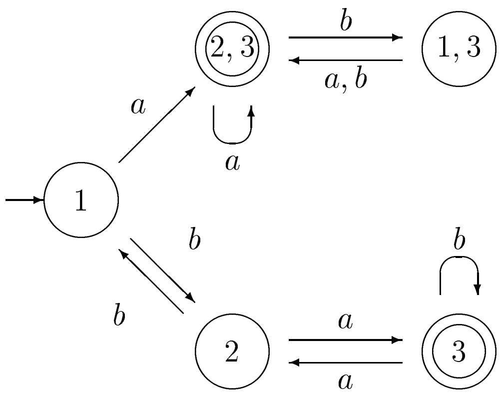
2

VRAI ou FAUX ? Si vous répondez faux, vous corrigerez le dessin pour avoir le bon determinisé.

Le déterminisé de



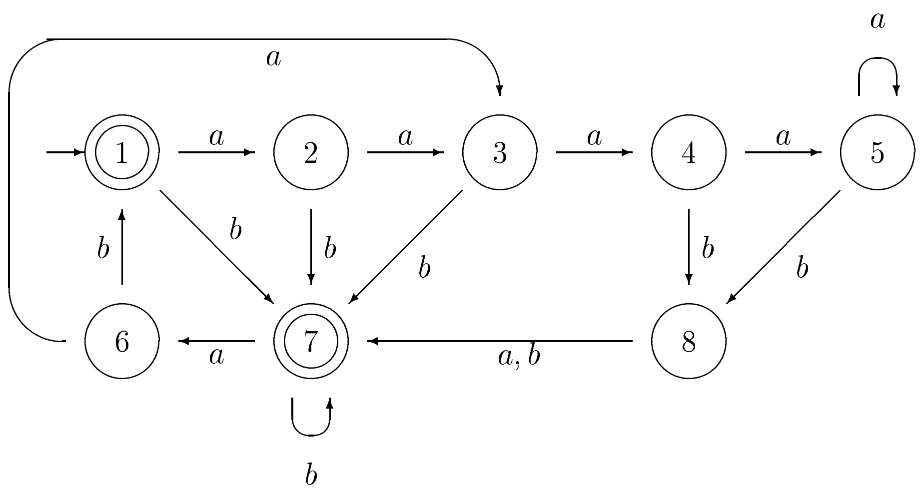
est



3

VRAI ou FAUX ? Si vous répondez faux, vous donnerez l'automate minimal.

L'automate suivant est minimal



4

Ce qui suit est-il CORRECT ou FAUX ? Si vous répondez faux, vous devez dire où il y a une erreur, puis corriger ce qui est écrit de façon à avoir un énoncé correct avec une preuve correcte.

On considére le langage $M = \{a^n b^n (ab)^n | n \geq 1\}$.

Le langage M n'est pas reconnaissable.

Cela se démontre par l'absurde :

Soit h et k les morphismes de $\{a, b, c\}^*$ vers $\{a, b\}^*$ définis par $h(a) = a$, $h(b) = b$, $h(c) = ab$, respectivement par $k(a) = a$, $k(b) = b$, $k(c) = \epsilon$.

Si M était reconnaissable, alors $h^{-1}(M)$, c'est à dire $M' = \{a^b b^n c^n | n \geq 1\}$ le serait aussi, et si M' était reconnaisable, alors $k(M')$ c'est à dire $M'' = \{a^b b^n | n \geq 1\}$ le serait aussi. Or il est bien connu que M'' n'est pas reconnaissable, et donc M ne l'est pas non plus.

5

Ce qui suit est-il CORRECT ou FAUX ?

Vous ferez en particulier attention à ce qu'il n'y ait pas d'embrouilles avec les quantificateurs ($\exists$ et $\forall$)

Si vous répondez faux, vous devez dire où il y a une erreur, puis corriger ce qui est écrit de façon à avoir un énoncé correct avec une preuve correcte.

On considère l'ensemble L des mots sur $\{a, b\}$ de longueur paire qui ont plus de a dans leur première moitié que dans dans leur seconde, i.e.

$$L = \{u \in \{a, b\}^* | \exists v, w \in \{a, b\}^*,\ u = vw,\ |v| = |w|,\ |v|_a \geq |w|_a\}$$

On veut savoir si cet ensemble est pompable.

Cet ensemble est pompable, en effet :

Soit N un entier plus grand que 2 quelconque (Pour vérifier la propriété de pompage, il faut qu'il existe un N tel que ... On va montrer que tous les $N \geq 2$ conviennent, ce qui implique qu'il y a bel et bien un N qui convient, par exemple $N = 73$)

Soit $u = a^N b^N b^{2N}$.

On a bien $u \in L$ car il est de longueur paire (à savoir 4N), sa première moitié est $a^N b^N$ dans laquelle il y a N a, sa seconde moitié est b^{2N} dans laquelle il y a 0 a, il y a donc plus de a dans la première moitié que dans la seconde.

Par ailleurs la longueur de u est bien supérieure à N.

u est pompable, en effet, on peut prendre la décomposition $u = xyz$ avec
$x = \epsilon$, $y = a^2$, $z = a^{N-2} b^N b^{2N}$.

Cette décomposition est réglementaire puisque $y \neq \epsilon$ et que $|xy| = 2 \leq N$.

Pour tout p, $xy^p z$ est bien dans le langage, en effet, c'est bien un mot de longueur paire (à savoir $4N + 2(p-1)$) et comme on a pompé dans les a au début, le mot $xy^p z$ est de la forme $a^i b^j$. Deux cas se présentent :

cas 1 : $i > j$. Dans la première moitié, il n'y a que des a, dans la seconde, des a et des b, il y a donc plus de a dans la première moitié que dans la seconde.

cas 2 : $i \leq j$: Dans la première moitié, il y a des a et des b, dans la seconde, que des b, il y a donc plus de a dans la première moitié que dans la seconde.

et donc $xy^*z \subset L$, on a donc bien pompé dans u et le langage est donc pompable.

On remarquera que le fait que L soit pompable ne dit rien sur le fait que L est reconnaissable.