Licence d'Informatique Examen d'Informatique Théorique 8/06/2000

Numéro d'identification : **Numéro de place :**

N'oubliez pas d'anonymer votre copie principale avant de glisser ces feuilles à l'intérieur. N'oubliez pas d'entourer de 2 cercles les états acceptants des automates. Notes de cours (Web ou manuscrites) sont autorisées.

1 Langages reconnaissables

Soient L un langage reconnu par un automate déterministe quelconque complet ou pas $A = (V_t, Q, q_0, F, T)$, et $q_m \in Q$ un état quelconque de Q. On définit l'automate non-déterministe

$$d(A, q_m) = (V_t, Q \times Q, (q_0, q_m), \{q_m\} \times F, T')$$
$$\text{tel que}$$
$$T'((q, q'), a) = \{(T(q, a), q'') \mid \exists b \in V_t \text{ tel que } q'' = T(q', b)\}$$

On admettra (une preuve vaut un bonus) que si u est un mot reconnu par l'automate $d(A, q_m)$, il existe un mot v de même longueur tel que le mot uv soit reconnu par l'automate A.

1. (1 point) Donner l'automate A' déterministe, minimal sans poubelle reconnaissant le langage $L' = 0^*1^+$. On nommera les états par des entiers naturels, l'état 0 étant initial.

2. (1,5 point) Donner successivement l'automate $d(A', 0)$, où 0 est l'état initial de A', puis l'automate déterministe minimal équivalent.

3. (1 points) Exprimer l'automate $demi(A)$ reconnaissant le langage $demi(L) = \{u \in \mathcal{V}_t^* \mid \exists v \in \mathcal{V}_t^* \text{ tel que } uv \in L \text{ et } \mid u \mid = \mid v \mid\}$ à l'aide des automates $d(A, q_m)$ pour $q_m \in Q$ et des opérations entre automates notées $\cap, \cup, \cdot$ et * permettant de construire les automates reconnaissant l'intersection, l'union, le produit, ou l'étoile de langages reconnaissables.

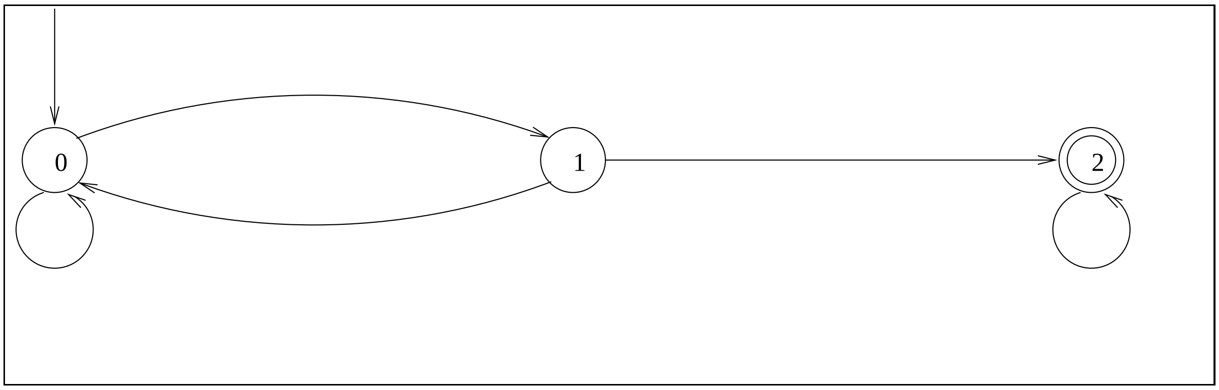
$demi(A) =$

4. (1,5 point) Donner l'automate $demi(0^*1^+)$ obtenu par la construction précédente, l'automate déterministe minimal équivalent, puis une expression rationnelle le dénotant.

2 Langages hors-contexte

On se propose maintenant d'étudier des opérations, comme l'opération miroir, qui transforment un langage reconnaissable en un langage qui ne l'est plus. On notera par $V = \{a, b\}$ l'alphabet (terminal), u un mot quelconque sur V, et $\tilde{u}$ son mot miroir. Les automates à pile considérés reconnaitront en état final avec une pile vide. On notera par $q \underset{a,A,w}{\longrightarrow} q'$ la transition lisant $a \in V_t$, $A \in V_P$ et empilant $w \in V_P^*$.

1. (1 point) Montrer que le langage $L' = \{u\tilde{u} \mid u \in a^*b^+\}$ est algébrique en complétant l'automate à pile non-déterministe $\{\{a,b\}, \{\phi, A, B\}, \phi, \{0,1,2\}, 0, \{2\}, \delta\}$ esquissé ci-dessous :



2. (2 points) Montrer que le langage L' n'est pas reconnaissable en utilisant les propriétés de clôture de cette classe de langages:

3. (2 points) Soit $A = (V, Q, q_0, F, \delta)$ un automate déterministe reconnaissant un langage L. Montrer que le langage $L' = \{u\tilde{u} \mid u \in L\}$ est algébrique en donnant ci-dessous la description d'un automate à pile $(V_t, V_P, \phi, Q \cup \{f\}, q_0, \{f\}, \delta')$ qui le reconnaisse :

$V_p = \{\phi\} \cup$

$\delta'(q \in Q, a \in V, x \in V_P) = (\quad , \quad)$ $\delta'(q_f \in F, \epsilon, x \in V_P) = (\quad , \quad)$

$\delta'(f, a, a) = (\quad , \quad)$ $\delta'(f, \epsilon, \phi) = (\quad , \quad)$

Décrire succinctement son fonctionnement :

3 Langages récursifs

On considère le langage $L = \{a^n b^p c^q \mid n > p > q\}$ sur l'alphabet $V = \{a, b, c\}$.

1. (1 point) Donner deux grammaires hors-contexte, de sources respectives S' et S" pour les langage $L_{n,p} = \{a^n b^p c^q \mid n \leq p\}$ et $L_{p,q} = \{a^n b^p c^q \mid p \leq q\}$

$S' \rightarrow$	$S'' \rightarrow$

2. (0,5 point) Montrer que le complémentaire $\tilde{L}$ de L est algébrique.

3. (2,5 points) Montrer que L n'est pas algébrique.

4. (2 points) Montrer que L est récursif en décrivant précisément le fonctionnement d'une machine de Turing qui reconnait L en terminant toujours.

4 Langages non récursifs

Étant donné un ensemble de couples de mots $P = \{(u_i, v_i)\}_{i \in [1..N]}$ sur l'alphabet V ne contenant pas le symbole $*$, on considère la grammaire $G = \{V, \{S\}, S, \{S \to u_1 S \tilde{v_1}, \ldots, S \to u_N S \tilde{v_N}, S \to *\}\}$, où $\tilde{u}$ désigne le mot miroir du mot u.

1. (0,5 point) Caractérisez la forme des mots engendrés par la grammaire G.

2. (1 point) En déduire que le problème de Post P a une solution si et seulement si le langage engendré par G contient un palyndrome.

3. (1,5 point) En déduire une réduction du problème de Post à celui de l'intersection non vide de deux langages algébriques. On expliquera en quoi c'est bien une réduction.

4. (2 points) Soit *VA* le problème de savoir si l'intersection de deux langages algébriques quelconques, décrits, par exemple, par leurs grammaires hors-contexte respectives n'est pas vide. On demande de répondre par OUI ou NON aux questions ci-dessous, en les justifiant brièvement si nécessaire.

   VA est polynomial
   VA est NP-complet
   VA est récursif
   VA n'est pas récursif

   VA est récursivement énumérable

   VA n'est pas récursivement énumérable