Devoir d'IT

à rendre pour le 13 mars, n jours de retard valant 2^{n-1} points en moins.

1 D'un langage intersection à un automate

Soient $L_1 = \{w \mid w \text{ contient } abab\}$ et $L_2 = \{w \mid w \text{ contient } ba\}$.

1. Donner les automates déterministes minimaux reconnaissant $L_1 et L_2$. Justifier votre réponse.
2. En déduire un automate déterministe reconnaissant $L_1 \cap L_2$ par la construction de l'automate intersection vue en cours. L'automate obtenu est-il minimal? Si oui, donner la raison s'il y en a une. Si non, le minimiser.

2 D'un langage avec union et complémentation à un automate

1. Donner l'automate déterministe minimal reconnaissant les mots sur $V = \{a, b\}$ qui ne contiennent pas
   (a) le facteur ba,
   (b) le facteur $abba$,
   (c) le facteur $babba$.

   Justifier brièvement le principe de construction de ces automates.
2. En déduire que le langage des mots sur $V = \{a, b\}$ qui contiennent le facteur $babba$ exactement une fois est reconnaissable. On en donnera un automate déterministe, non nécessairement minimal, en justifiant la construction.
3. En déduire que le langage des mots sur $V = \{a, b\}$ qui contiennent le facteur $babba$ au moins 2 fois est reconnaissable. Cela est-il encore vrai
   - du langage des mots qui contiennent le facteur $babba$ au moins n fois, pour un n quelconque?
   - du langage des mots sur $V = \{a, b, c\}$ qui contiennent le facteur $babba$ au moins 2 fois?

   Justifier vos réponses.

3 D'une expression rationnelle à un automate

Soit l'expression rationnelle $(ac + b)a * (a + b + c)b(a + c) * +(a + c) * b(a + c) * b(a + c) * b(a + c)*$
Construire l'automate déterministe minimal la reconnaissant. Préciser la méthode employée et justifier les grandes étapes de la construction.

4 Reconnaissabilité : lemme de l'étoile et propriétés de clôture

Les langages suivants sont ils reconnaissables?

1. $L_1 = \{a^n b^m c^k \mid n \geq m + k\}$.
2. $L_2 = \{w.w^{-1}\}$, où w^{-1} dénote le mot miroir de w.

5 Propriétés de clôture

Étant donnée une fonction h de V dans V^*, on l'étend en une fonction encore notée h appellée homomorphisme de V^* dans V^* de la façon suivante :

$$h(\epsilon) = \epsilon, \qquad h(a \cdot u) = h(a) \cdot h(u) \quad \text{où } a \in V \text{ et } u \in V^*.$$

puis en une fonction encore notée h de $P(V^*)$ dans $P(V^*)$ de la façon suivante :

$$h(\emptyset) = \emptyset, \qquad h(\{u\} \cup L) = \{h(u)\} \cup h(L) \text{ où } u \in V^* \text{ et } L \in P(V^*).$$

On notera par h^{-1} la "fonction inverse de h", de $\mathcal{P}(V^*)$ dans $\mathcal{P}(V^*)$ telle que :

$$h^{-1}(L) = \{u \in V^* \mid h(u) \in L\}$$

Montrer que $h(L)$ est reconnaissable si et seulement si L est reconnaissable. Cela est-il aussi vrai pour $h^{-1}(L)$? Justifier votre réponse.